分岐理論からみたアトラクタの生成

龍谷大学理工学部数理情報学科　岡宏枝

1 はじめに

1963 年に気象学者の E. N. Lorenz [1] が大気循環による気候変動を説明するために流体の熱対流を表わす偏微分方程式からある方法 ([2]) によって導いた常微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -b + xy \end{cases} \tag{1.1}$$

には，いわゆるローレンツ・アトラクタ (Lorenz attractor) が数値実験によって観測される．(図 1) ただし，r, σ, b はパラメータで，σ はプラントル数，r はレーリー数を表わし，また b は対流現象を考えている領域の幾何学的形状によって決まる定数であり，ここでは $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ とした．

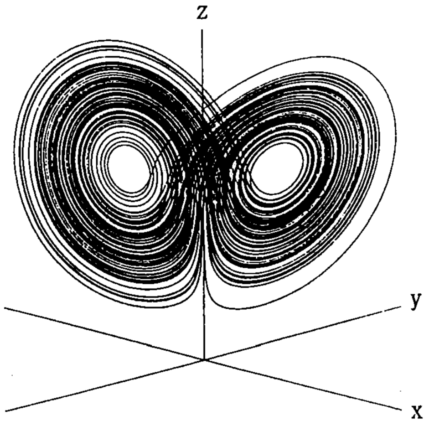


図 1: $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ におけるローレンツ・アトラクタ

このローレンツ・アトラクタは概ね次のような形状をしている．$r > 1$ のとき，平衡点は原点 $O = (0,0,0)$ のほかに

$$E_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

の 2 つ存在する．$r = 28$ のときにはこれらの平衡点はすべて不安定で一般に解軌道は E_+ もしくは E_- の周りをまわり続ける．またアトラクタは極めて 2 次元的で薄く 2 枚のディスクを張り合わせた様な形をしている．

このようなローレンツ・アトラクタの軌道の振る舞いを表現する1つの幾何学的モデルとして Guckenheimer, Williams 等によって Geometric Lorenz attractor が定式化された ([3], [4], [5], [6]). 次の4つの条件をみたす3次元ベクトル場 v を考えよう.

(GL0) まず v は変換 $g:(x,y,z)\mapsto(-x,-y,z)$ に対して不変である. 即ち,

$$v(g\mathbf{x}) = gv(\mathbf{x}),\ \forall\mathbf{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

が成り立つ. このようなベクトル場を g- 同変ベクトル場という.

(GL1) $v(O)=0$ かつ

$$Dv(O) = \begin{pmatrix} \lambda^u & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{ss} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^s \end{pmatrix}$$

ここで, $0<-\lambda^s<\lambda^u<-\lambda^{ss}$. である.

(GL2) ベクトル場 v の定める流れに横断的な適当な長方形 R があり, R は流れによって R の中に写される. R の像は2つのカスプ状領域に分けられている. (図 2(1))

(GL3) この流れによって定まる R から R の写像はポアンカレ (Poincaré) 写像と言われている. ポアンカレ写像は適当な座標変換で $\Pi:(x,y)\mapsto(f(x),H(x,y))$ と表わされ次を満たすと仮定する.

1. $\Pi(-x,-y)=-\Pi(x,y)$
2. $f:[-1,1]\to[-1,1]$ は0以外で連続.
3. $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=1$
4. f のリプシッツ定数は $\sqrt{2}$ 以上でありかつ $\lim_{x\to 0} f'(x)=+\infty$
5. $f(-1)<0<f(1)$
6. ある定数 $c<1$ が存在し, $x\neq 0$ に対し, $0<\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)<c$ と $\lim_{x\to 0}\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)=0$ が成り立つ. (図 2(2))

このようなベクトル場には R との交わりが $\Lambda=\cap_n\Pi^n(R)$ で表わされるアトラクタが存在する. この Λ を Geometric Lorenz Attractor (以後 GLA と略す) と言う. このアトラクタは本質的に1次元写像 f を調べることで解析でき, 例えば初期値に関する敏感な依存性などカオスとしての性質を持つことがわかっている.

しかし, 実際のローレンツ方程式 (1.1) がこの条件を満たすかどうかは今のところわかっていない. それは特に最後の条件 (GL3) のチェックが難しいためである. 一方, 幾何学的なモデルである GLA をもつ微分方程式を分岐理論的な立場から見つけることができる. そのメカニズムについて述べていきたい.

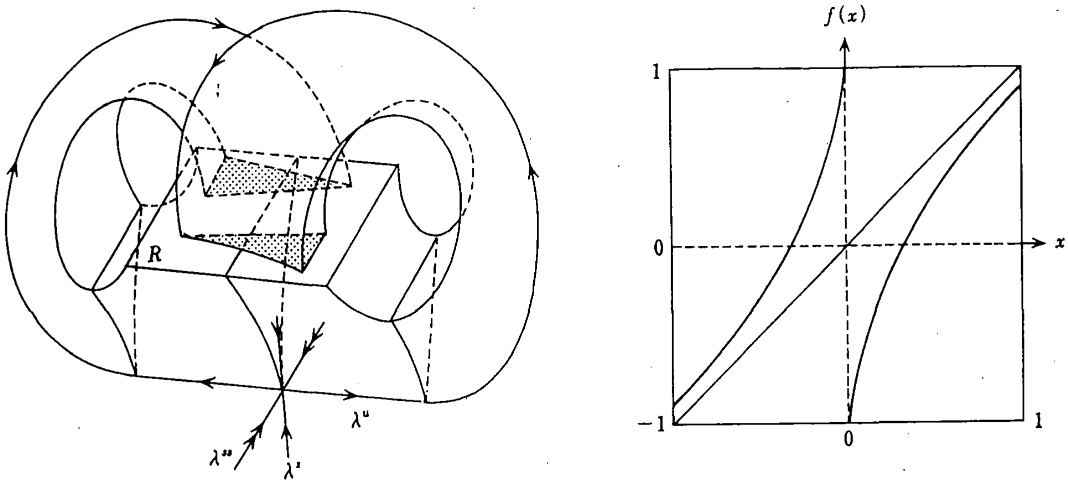


図 2: (1) Geometric Lorenz Attractor　(2) $f(x)$ のグラフ

2 GLA を生ずるホモクリニック分岐

ここでは，ある退化した homoclinic 軌道を持つベクトル場の摂動系に GLA が生ずることをいいたい．

ベクトル場 v は上で述べた条件 (GL0) 及び (GL1) を満たすとする．また，原点の安定多様体 $W^s(O)$ と広義不安定多様体 $W^{eu}(O)$ という不変多様体を考える．原点の安定多様体 $W^s(O)$ とは，そこを初期値とした軌道が t が $+\infty$ になるとき原点 O に収束する点全体のなす集合である．これはまた，λ^s 及び λ^{ss} に対する固有空間と接する不変多様体であると言える．原点の広義不安定多様体 $W^{eu}(O)$ とは，O で λ^u 及び λ^s に対する固有空間と接する不変多様体である．これらの存在に関しては [8] を参照．更にベクトル場 v に homoclinic 軌道 Γ，即ち，これらの不変多様体の交わり $W^{eu}(O) \cap W^s(O) \setminus \{O\}$ があるとする．

退化していない，つまり "generic(生成的)" な homoclinic 軌道というのは次の 3 つの条件が成り立っている場合である．Γ を (GL1) を満たすベクトル場の原点に対する homoclinic 軌道とする．

(A1)　$\lambda^u \neq |\lambda^s|$.

(A2) homoclinic 軌道 Γ は t が $+\infty$ になるとき，λ^s の固有方向に沿って原点 O に収束する．

(A3) $W^{eu}(O)$ と $W^s(O)$ は Γ に沿って横断的に交わる．

このような generic な homoclinic 軌道を持つ力学系に摂動を入れても，GLA の 4 つの条件をみたすような系は得られないことが知られている．ポアンカレ写像が縮小的になり，カオスが生じないか，あるいは，$\Pi : R \to R$ となる適当な長方形 R がとれないからである．しかし，より退化した分岐を考えれば，アトラクタが出てくる場合がある．

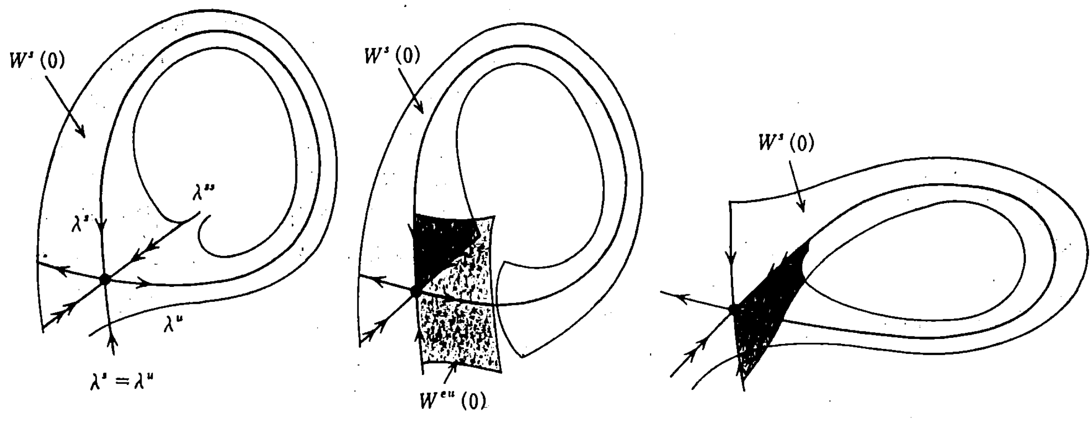
generic な homoclinic 軌道に対する条件が成立していない場合，どのようなことが起こるのかみるために，次の 3 つの場合，つまり，3 つの generic な条件 (A1),(A2),(A3) のうち 1 つが満たされていない場合を考える．（図 3)

定義 2.1.

(Inc) Γ が *inclination-flip homoclinic* 軌道であるとは, (A1) と (A2) を満たし (A3) を満たさないもの，つまり，$W^s(O)$ と $W^{cu}(O)$ は Γ に沿って接していることをいう．

(Orb) Γ が *orbit-flip homoclinic* 軌道であるとは, (A3) と (A1) を満たし，(A2) を満たさない，つまり，$t \to +\infty$ のとき Γ が原点において λ^{ss} に対する固有方向に接して収束していることをいう．

(Res) Γ が *resonant homoclinic* 軌道 であるとは, (A2) と (A3) を満たし，(A1) を満たさない，つまり，共鳴条件 $\lambda^u = |\lambda^s|$ が成り立っていることをいう．



(1) (2) (3)

図 3: 退化した homoclinic 軌道; (1) resonant homoclinic 軌道, (2) inclination-flip homoclinic 軌道, (3) orbit-flip homoclinic 軌道

このような退化した homoclinic 軌道の分岐を最初に研究したのは柳田 [7] である．その後 Rychlik[9] はある種の inclination-flip homoclinic 軌道の摂動系に GLA が存在することを示した．Robinson[10] は Rychlik の証明が難解であるというので別の場合 — resonant な homoclinic 軌道 — の分岐を調べ，やはりその摂動系に GLA が存在するという結果を得た．第 3 の場合，つまり orbit-flip homoclinic 軌道の分岐についても最近 [11] において同様の結果が得られている．以上の結果を定理としてまとめておこう．

定理 **2.2.** *([9], [10], [11])*
v は *(GL1)* を満たす g- 同変なベクトル場で，$z-$ 軸に関して，対称な 1 対の *homoclinic* 軌道 $\Gamma_\pm$ を持つとする．v_μ を $v_0 = v$ となる v の *generic* な摂動系であるとする．

$\Gamma_\pm$ が次のどれかをみたすとき，任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対しても $|\mu| < \varepsilon$ である μ で v_μ が *GLA* を持つものが存在する．

(1) *(Rychlik)* $\Gamma_\pm$ は *inclination-flip homoclinic* 軌道の組で，

$$\frac{1}{2} < \frac{|\lambda^s|}{\lambda^u} < 1 < \frac{|\lambda^{ss}|}{\lambda^u}$$

を満たす．

(2) *(Robinson)* $\Gamma_\pm$ は *resonant* な *homoclinic* 軌道の組で，

$$\lambda^{ss} - \lambda^s + \lambda^u < 0$$

を満たす．

(3) $\Gamma_\pm$ は *orbit-flip homoclinic* 軌道の組である．

3 GLA を生ずる特異点の分岐

§2で退化した homoclinic 分岐に GLA が存在することを見てきたが，ベクトル場の退化した特異点からの分岐でもやはり GLA が出現する．簡単のためにベクトル場 $\dot{x} = f$, $\dot{y} = g$, $\dot{z} = h$ を

$$f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$$

と書くことにする．

定理 **3.1.** *([12])* v を $\mathbb{R}^3$ の *3-jet* が以下で与えられるベクトル場の特異点とする．

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x^3\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.1}$$

このとき，これらの特異点の開折で *GLA* を含むものがある．より詳しく言うと，任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対し，$|\mu| < \varepsilon$ となるパラメータの組 $\mu = (\alpha, \gamma, A, B, C)$ が存在して，そのパラメータ値に対して，3 次までの項が次のように与えられる 3 次元常微分方程式は *GLA* を含む．但し $|\mu|$ は適当な $\mathbb{R}^5$ のノルムとする．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz, \\ \dot{z} &= \gamma z + x^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで $\frac{1}{2} < -\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} < 1$ かつ $A < 0$.

この微分方程式は随分特殊な形をしている様に思われるかも知れないが，これはある退化特異点の標準形でありそれ程特殊というわけではないのである．まず，ある g- 同変

なベクトル場が平衡点を持つとする．そこでの線型化行列が 3 重の零固有値を持ち，その Jordan 標準形が

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとき，その 2 次の標準形は

$$xz\frac{\partial}{\partial y}, yz\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial z}, z^2\frac{\partial}{\partial z}$$

の項を含むが，われわれはこのうち $x^2\frac{\partial}{\partial z}$ 以外の 3 つの項は含まない事を要請する．3 次の項については，2 次までの項を

$$y\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial z}$$

としたとき

$$x^3\frac{\partial}{\partial y},\ x^2y\frac{\partial}{\partial y},\ xz^2\frac{\partial}{\partial y},\ yz^2\frac{\partial}{\partial y},\ x^2z\frac{\partial}{\partial z},\ z^3\frac{\partial}{\partial z}$$

の項を含むが，このうち $xz^2\frac{\partial}{\partial y}$ のみが消えていることを要請するだけであとの項はあっても定理 3.1と同様の結果は成り立つ．従って，もう少し一般的にいえば，GLA を生ずる退化特異性としては

$$y\frac{\partial}{\partial x} + (-x^3 + bx^2y + cyz^2)\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + ex^2z + fz^3)\frac{\partial}{\partial z}$$

(但し，$(b, c, e, f) \in \mathbb{R}^4$ は定数) をとることが出来る．また，この退化特異性は線型部分の余次元 3 とあわせて余次元 7 となることがわかる．

"generic" な開折，あるいは摂動系とはこれら 7 つの余次元をすべて動かすようにパラメータが入っているものを言うが，定理はこれらのうち (3.2) で示された最低 5 つの項 $(\alpha, \gamma, A, B, C)$ を動かすように入っていればいいのであり，これ以上の摂動の項が入っていても，あるいはそれらの入り方もこの様でなくても，本質的に (3.2) で示した項がパラメータを動かすことにより独立に動くように出来れば定理 3.1の結論は成り立つことを示している．

この定理は blowing up をすることにより，§2の退化した homoclinic 分岐のうち，定理 2.2(1) の場合に帰着させて示される．同様に定理 2.2(2) に対応した退化特異性についての定理は次のようになる．

定理 3.2. *([11])* v を $\mathbb{R}^3$ の *3-jet* が以下で与えられるベクトル場の特異点とする．

$$y\frac{\partial}{\partial x} + (-x^2y + ayz)\frac{\partial}{\partial y} \pm z^2\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.3}$$

このとき，これらの特異点の任意に小さい開折で *GLA* を含むものがある．より詳しく言うと，任意に小さい ε に対し，$|\mu| < \varepsilon$ となるパラメータの組 $\mu = (\alpha, \gamma, A, B)$ が存

在して，そのパラメータ値に対して，3 次までの項が次のように与えられる 3 次元常微分方程式は GLA を含む．但し，$|\mu|$ は適当な $\mathbb{R}^4$ のノルムとする．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= \alpha x + \gamma y + A x^3 - x^2 y + a y z, \\
\dot{z} &= B z \pm z^2,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

ここで $a \neq 0$.

4 定理 3.1 の証明の概略

(3.2) における各変数を次のようにリスケールする：

$$
\begin{aligned}
&x = \varepsilon\bar{x}, \quad && \alpha = \varepsilon^2\bar{\alpha}, \quad && A = \varepsilon\bar{A}, \\
&y = \varepsilon^2\bar{y}, && \gamma = \varepsilon\bar{\gamma}, && B = \varepsilon\bar{B}, \\
&z = \varepsilon\bar{z}, && && C = \bar{C}, \\
&t = \varepsilon^{-1}\bar{t}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

ε を $\varepsilon \to 0$ とすると次の式を得る．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= \bar{\alpha} x - x^3 + \bar{A} y + \bar{B} x z + \bar{C} y z, \\
\dot{z} &= \bar{\gamma} z + x^2,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

式 (3.2) においてはパラメータ $(\alpha, \gamma, A, B, C)$ は摂動を表すため，小さな値を取るが，この式 (4.2) では，スケーリングをしているため，一般には小さな値でなくても良い．しかし，A, B, C は更に小さいとし，ベクトル場 (4.2) を次のベクトル場の 3- パラメータの摂動系と考える：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= \bar{\alpha} x - x^3, \\
\dot{z} &= \bar{\gamma} z + x^2.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

この方程式の平衡点の固有値は $\lambda^s = \bar{\gamma}, \lambda^u = -\lambda^{ss} = \sqrt{\bar{\alpha}}$ であることから，パラメータ $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ は次の条件を満たすとする：

$$
\bar{\alpha} > 0, \quad \bar{\gamma} < 0, \quad \frac{1}{2} < -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\alpha}}} < 1
$$

ベクトル場 (4.2) の最初の 2 式については Hamilton 系であることから，(4.3) には homoclinic 軌道が存在し，上の仮定から定理 2.2の (1) の右側の不等式を除いてすべての条件を満たす inclination-flip homoclinic 軌道であることがわかる．右側の不等式は，$\frac{\lambda^{ss}}{\lambda^u} = 1$ であるから満たされていないが，パラメータ A, B, C を適当に動かして，inclination-flip homoclinic 軌道を保ったまま $\frac{\lambda^{ss}}{\lambda^u} < 1$ が満たされるようにすることを考える．そうすれば，ベクトル場 (4.2) には，Rychlik の定理が使え GLA の存在がわかる． inclination-flip homoclinic 軌道の存続に関して次が成り立つ．

命題 4.1. 次の２つのベクトルが線型独立であれば，*inclination-flip homoclinic* 軌道は $\mu=(A,B,C)$-*space* の曲線上で存続する：

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}(t)\frac{\partial v}{\partial\mu}(h(t),0)dt,$$

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}(t)\frac{\partial}{\partial\mu}Dv(h(t),0)e(t)dt,$$

但し，$h(t)=(x(t),y(t),z(t))$ は式 *(4.3)* の *homoclinic* 軌道，$e(t)=(0,0,e^{\gamma t})^T$，$\hat{b}(t)=(\dot{y}(t),-\dot{x}(t),0)$ は *homoclinic* 軌道 $h(t)$ に沿った変分方程式の随伴方程式

$$\dot{\hat{u}}=-\hat{u}\cdot Dv(h(t),0)$$

の有界な解である．更に曲線はベクトル M_1 と M_2 に $\mu=0$ で直交する．

ベクトル場（4.2）の場合には M_1,M_2 は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}M_1 &= (m_A,m_B,m_C)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(-\dot{x}(t)y(t),-\dot{x}(t)x(t)z(t),-\dot{x}(t)y(t)z(t))dt;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= (0,n_B,n_C)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(0,-\dot{x}(t)x(t)e^{\gamma t},-\dot{x}(t)y(t)e^{\gamma t})dt.\end{aligned}$$

inclination-flip hpmpclinic 軌道の存続する曲線はこの２つのベクトルに直交しているのでその $\mu=0$ における接方向は

$$d=(m_Bn_C-m_Cn_B,-m_An_C,m_An_C) \tag{4.4}$$

で与えられる．最後に次の補題から定理が導かれる．

補題 4.2. 方向ベクトル d の第一成分は０でない，即ち，

$$m_Bn_C-m_Cn_B\neq 0.$$

この補題より $\lambda_s=-\gamma$，$\lambda_u=A/4+\sqrt{A^2/4+\alpha}$，$\lambda_{ss}=A/4-\sqrt{A^2/4+\alpha}$ であるから $A<0$ の方向に摂動を加えれば，ベクトル場（4.2）即ち，(3.2) は Rychlik の定理の条件を満足することになり，定理 3.1は証明された．

参考文献

[1] E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130.

[2] 丹羽敏雄, 微分方程式と力学系の理論入門, 1988, 遊星社.

[3] J. Guckenheimer, in *Hopf Bifurcation and its Applications*, J.E. Marsden and M. McCracken (eds.), pp. 368, 1976, Springer.

[4] J. Guckenheimer and R.F. Williams, Publ. Math. IHES 50 (1979) 59.

[5] R.F. Williams, Publ. Math. IHES **50** (1979) 321.

[6] V.S. Afraimovich, V.V. Bykov and L.P. Shil'nikov, Trans. Moscow Math. Soc., **44** (1983) 153.

[7] E. Yanagida, J. Diff. Eq., **66** (1987) 243.

[8] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lect. Notes Math., Vol. 583, 1977, Springer.

[9] M. Rychlik, Ergod. Th. Dynam. Sys. **10** (1990) 793.

[10] C. Robinson, Nonlinearity, **2** (1989) 495.

[11] H. Kokubu and H. Oka, Bifurcation of geometric Lorenz attractors from orbit-flip double homoclinic loops, in preparation.

[12] F. Dumortier, H. Kokubu and H. Oka, A degenerate singularity generating geometric Lorenz attractors, to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1995